

La théorie intrinsèque de la particule de Dirac et “l’Ecole Louis de Broglie”

ROGER BOUDET

Université de Provence, Pl. V. Hugo, 13331 Marseille cedex 13, France

En hommage à Olivier Costa de Beauregard et Georges Lochak, et à la mémoire de Francis Halbwachs et Takehiko Takabayasi

ABSTRACT. The works of the Louis de Broglie’s School about the Dirac particle during the years 1950 and their later developments are recalled and analysed.

1. Introduction

Nous nous proposons d’évoquer la partie des recherches de l’Ecole Louis de Broglie des années 1950 consacrée à l’étude des propriétés de la particule de Dirac (électron ou positron), invariantes dans tout changement de repère galiléen, et ses prolongements ultérieurs.

Disons tout de suite que ces travaux n’ont mené à aucun résultat expérimental nouveau mais qu’il ne nous paraît pas impossible qu’on s’aperçoive d’ici quelque temps que sur des points parmi les plus fondamentaux de la physique ils étaient en avance d’au moins un demi-siècle.

En ce qui concerne les propriétés invariantes, les ouvrages sur la théorie de Dirac se limitent dans leur quasi totalité, à la construction du courant de probabilité et à l’établissement de sa conservation. On s’y place ensuite immédiatement dans un repère galiléen particulier, celui où les sources du champ électromagnétique agissant sur la particule de Dirac peuvent être considérées comme au repos, ou si elles sont en mouvement, celui qu’on utilise pour définir ce mouvement. Comme les mesures expérimentales s’effectuent dans leur quasi totalité sur des particules soumises à un tel champ, l’établissement de propriétés invariantes

autres que celle fondamentale de la conservation du courant ne paraît pas nécessaire. Il est évident que ces propriétés ne peuvent pas apporter directement quelque chose de nouveau sur le plan expérimental.

Dès lors sur quoi pouvait se fonder la démarche de l'Ecole L. de Broglie? On peut certes se contenter de n'importe quel formalisme, aussi abstrait qu'il puisse être (il s'agit évidemment ici du formalisme des spineurs, voir Note), quand il permet de retrouver par le calcul les résultats expérimentaux. Mais on peut aussi chercher à comprendre ce que recouvre ce formalisme de manière à atteindre une vue cohérente des grandeurs physiques qui en sont l'objet.

Depuis l'avènement de la Relativité, une vision cohérente avec les principes relativistes ne peut que se placer dans le cadre de l'espace de Minkowski donc indépendamment de tout repère galiléen. Nous allons voir que celle de l'Ecole L. de Broglie allait mener à des concepts nouveaux, dont les expériences actuelles semblent pouvoir se passer (mais au prix de contradictions avec la théorie), qu'il faudra bien un jour prendre en compte.

2. Sur le passage de la théorie de Dirac à ses formes invariantes

Dès la publication de l'article de Dirac en 1928, des grandeurs invariantes, vecteurs d'univers, multivecteurs (i.e. tenseurs antisymétriques) invariants, autres que le courant de Dirac, comme le courant de Gordon, le tenseur de Tetrode, ont été construites, mais il semble qu'on ne se soit préoccupé que bien plus tard de la possibilité d'une mise sous une forme invariante complète de la théorie de Dirac.

Notons les difficultés de l'entreprise. L'équation de Dirac utilise le spineur qui portent son nom. Cette grandeur à quatre composantes complexes est un être abstrait qui ne semble exister que par ce que les matrices de Dirac γ_μ qui agissent sur lui veulent bien en faire. Ces matrices, comme celles σ_k de Pauli à partir desquelles elles sont construites, se présentent comme des objets propres à faire fuir (à une exception notable près, voir Note) tout géomètre normalement constitué: emploi du nombre imaginaire $\sqrt{-1}$, recours à un repère, pire, formes des matrices très différentes d'un axe du repère à l'autre. On devine qu'une direction de plan, celui des (x, y) , de l'espace est privilégiée, et l'on soupçonne que les composantes des spineurs ont des significations géométriques tout à fait différentes. Du jamais vu en géométrie ou presque (voir Note), et en physique.

Schrödinger s'était déjà inquiété (il avait été d'ailleurs le seul physicien à le faire) de ce que son équation fut à valeur essentiellement complexe, alors que dans toute l'histoire de la physique les nombres complexes n'avaient été jusque là utilisés que comme des auxiliaires dont on pouvait se passer. A fortiori les matrices et spineurs de Pauli et de Dirac constituaient un saut dans le monde de l'abstraction.

L. de Broglie s'était bien servi d'un nombre complexe pour présenter comme une horloge son corpuscule [1], mais le plan complexe où il a situé le cadran de l'horloge correspond à un plan de l'espace bien réel, qui n'est autre que le "plan du spin" (voir plus loin) de la particule de Dirac.

Il n'est pas du tout question évidemment de faire le procès d'un formalisme qui malgré ses défauts (voir Note) ou *justement à cause d'eux* (la direction de plan privilégiée est celle qui après une rotation de Lorentz devient la direction du "plan du spin", dans lequel de plus on peut situer la jauge électromagnétique $U(1)$) a été au fondement de la mécanique quantique relativiste et son prolongement aux théories actuelles de jauge et des particules élémentaires. Ce formalisme est étrange pour un géomètre mais cohérent. Il a été introduit par des chercheurs illustres dont le sens de la physique était profond. Tous les objets connus de la physique sont des objets réels, des vecteurs ou multivecteurs de l'espace-temps, mais il n'est pas certain que l'emploi des algèbres réelles multivectorielles (extérieure, de Clifford) les aurait menés à leurs découvertes.

Le lien entre le formalisme spinoriel complexe et la structure euclidienne réelle de l'espace $E^3 = R^{3,0}$ et l'espace-temps $M = R^{1,3}$ peut être explicité sans difficulté pour les matrices: il existe un isomorphisme entre les espaces engendrés par 1, les σ_k d'une part, les γ_μ d'autre part, ainsi que les produits de ces matrices, et les algèbres réelles de Clifford $Cl(3,0)$ et $Cl(1,3)$ fondées sur la structure euclidienne respectivement de E^3 et M et dont les éléments sont les scalaires, leurs vecteurs et multivecteurs. Mais il n'en est pas du tout de même pour les spineurs, dont l'étude a été absente, jusqu'à une date récente, de la totalité des publications, hormis une seule d'entre elles (voir Note) mais de nature à augmenter le mystère de ces objets.

Le problème était donc de construire, à partir de ces êtres abstraits et mystérieux qu'étaient les spineurs, des grandeurs de l'espace-temps, réelles et d'une claire signification géométrique, indépendantes de tout repère galiléen. On conçoit que la tâche n'avait rien d'aisé.

3. L'École Louis de Broglie et la forme intrinsèque de la théorie de Dirac

La première tentative sérieuse de la mise sous forme invariante de la théorie de Dirac remonte à 1939 [2]. J. Yvon y prend pour modèle une étude de 1926 due à F. Madelung où l'électron est traité à partir de l'équation de Schrödinger comme un fluide continu. On peut lire en Ref. [2], p.24 que "*le système tensoriel [d'Yvon] n'est pas strictement équivalent à celui de Dirac*", mais il initie un point de vue par lequel "*... l'électron magnétique peut être traité comme un fluide continu ... et qu'il apparaît alors comme pourvu d'un caractère foncièrement classique...*". C'est sans doute ce caractère d'apparence classique du fluide de Dirac qui allait pousser L. de Broglie et ses collaborateurs au milieu des années 1950 vers l'étude de la théorie intrinsèque de Dirac, afin de tenter d'éclaircir le mystère que constitue la théorie des quanta.

La notion de fluide et son analyse tensorielle (c'est à dire en fait multivectorielle et indépendante de tout repère galiléen) allaient être au préalable développée sous la direction de L. de Broglie dans la thèse de O. Costa de Beauregard [3], surtout en ce qui concerne les propriétés du tenseur de Tetrode, démontré comme étant le bon tenseur d'impulsion-énergie. Mais c'est surtout grâce aux travaux [4] de T. Takabayasi qu'a pu être obtenu un système complet de grandeurs et d'équations invariantes strictement équivalent à la théorie de Dirac. Dans le même temps, Jakobi et Lochak faisaient sortir dans [5] le spineur de Dirac de son ghetto d'abstraction et de mystère en lui donnant une signification géométrique précise expliquant en particulier ce qu'est la jauge électromagnétique $U(1)$. Les travaux de Bohm, J. P. Vigièr, F. Halbwachs sur le corpuscule tournant et un modèle dit de la gouttelette se trouvent décrits dans l'ouvrage [6] très documenté d'Halbwachs mais sont tournés surtout vers des considérations de nature dynamique dont certaines (le "balourd", la "giration") ont été abandonnées par Halbwachs lui-même. Le point de vue géométrique est repris par Halbwachs, J.M. Souriau, Vigièr dans [7] où l'on donne une confirmation indiscutable de l'interprétation par Jakobi et Lochak de la jauge $U(1)$, initiant ainsi la voie d'une étude enfin non abstraite et cohérente, au sens de la géométrie relativiste, de toutes les théories de jauge.

C'est ce point de vue géométrique et lui seul que nous allons évoquer ici, car, à la multiplication par les constantes c ou $\hbar c/2$ près, il suffit pour décrire ce que l'on peut savoir sur les grandeurs associées au mouvement, au spin et à l'énergie de la particule de Dirac.

Nous évoquerons aussi les travaux postérieurs à ceux de l'Ecole L. de Broglie, directement consécutifs ou réalisés indépendamment. Ces derniers ont apporté de grandes simplifications dans les calculs par le choix de l'outil géométrique qu'est l'emploi direct des algèbres multivectorielles réelles, mais n'ont rien apporté de fondamentalement nouveau par rapport aux travaux de cette Ecole. Cependant ils n'en constituent pas moins une confirmation éclatante de leur exactitude mathématique. Ils permettent de réduire à néant les contestations à son sujet par des chercheurs dont la valeur scientifique n'est pas à mettre en doute, mais qui n'ont pas suffisamment approfondi ce qu'est géométriquement un spineur de Dirac. Comme cet objet est la brique dont est constituée actuellement la théorie des particules, du moins celle qui inclut la théorie de l'électrofaible, on conçoit que toute erreur à son sujet soit inquiétante. Ne serait-ce que sur ce seul point, l'apport des travaux de l'Ecole L. de Broglie est considérable.

4. La forme intrinsèque de la théorie de Dirac

Nous allons rappeler les points principaux de la théorie intrinsèque de la particule de Dirac, dans ce qu'ils nous paraissent comme essentiels pour une approche géométrique sûre de la mécanique quantique, de son inclusion dans la relativité générale et de son prolongement à la théorie des particules.

1. L'interprétation géométrique du spineur de Dirac

Dans [5], 1956, le spineur de Dirac Ψ est mis sous la forme

$$\Psi = \psi U, \quad \psi = \sqrt{\rho} e^{\underline{i}\beta/2} R \quad (1)$$

U est le spineur unité $(1, 0, 0, 0)$; $\rho \in \mathbf{R}$ est la densité invariante; \underline{i} est la matrice $\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ (désignée aussi à cette époque par γ_5 et dans [5] par $i\sigma_4$); $\beta \in \mathbf{R}$ (désigné par η dans [2], par θ dans [4], et par A dans [5]) est le "mystérieux" (l'expression est de L. de Broglie) angle de Takabayasi (voir plus loin) introduit pour la première fois par Yvon; R est une rotation de Lorentz orthochrone, exprimée matriciellement en fonction des γ_μ et des $i\sigma_k$, qui amène en coïncidence le repère du laboratoire $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ avec le repère propre $\{v, n_1, n_2, s\}$ ou tétrapode de Takabayasi ([6],[7]):

$$v = Re_0R^{-1}, \quad n_k = Re_kR^{-1} \quad (k = 1, 2), \quad s = Re_3R^{-1} \quad (2)$$

Les vecteurs v , ($v^2 = 1$), et s , ($s^2 = -1$) sont appelés vitesse et vecteur spin (noté w dans [4]) unitaires d'univers. Le vecteur ρv est le courant de Dirac. Les vecteurs n_1, n_2 définissent le "plan du spin" [8], 1967.

Nous avons changé les notations de [5] afin d'éviter des confusions, et pour l'angle de Takabayasi pour adopter la notation de D. Hestenes qui sans expliquer le rôle physique de cet angle lui a donné sa vraie signification géométrique.

La méthode suivie par Jakobi et Lochak est astucieuse. Si les spineurs sont des objets mystérieux, on peut manipuler en toute sécurité algébrique les matrices qui agissent sur eux. L'astuce a consisté à réduire à sa plus simple expression le rôle du spineur de Dirac, le reste étant composé de matrices adéquatement placées, grâce à des considérations sur le passage de la théorie de Dirac à sa forme intrinsèque. Ainsi était tournée la difficulté de l'utilisation du formalisme des spineurs où l'on connaît bien le maniement des opérateurs mais où l'on ne sait pas grand'chose des objets sur lesquels ils opèrent, bien que ces objets soient ceux qui représentent les grandeurs de la physique.

Une dizaine d'années plus tard, dans [8], 1967, D. Hestenes mettait, en identifiant les γ_μ aux vecteurs e_μ , le spineur de Dirac sous la forme rigoureusement identique à celle de [5], à ceci près que, dans [8], U est un idempotent compliqué, dont on peut se passer (voir Note), au lieu du spineur unité.

Hestenes ignorait tout des travaux de l'Ecole L. de Broglie. (La relation a été faite dans [9], 1968, par G. Casanova à qui j'avais communiqué l'article d'Hestenes). Son approche reposait sur le formalisme réel de l'algèbre de Clifford $Cl(M) = Cl(1, 3)$ associée à M .

On rappelle (voir par exemple [10], 1988) que l'algèbre de Clifford $Cl(p, n-p)$ associée à l'espace euclidien $R^{p, n-p}$ est une algèbre associative tenant compte de la structure euclidienne de l'espace et opérant sur les éléments de l'algèbre extérieure (ou grassmannienne) $\wedge R^n$ (somme directe des multivecteurs éléments de $\wedge^p R^n$, ou tenseurs antisymétriques de rang p compris entre $p = 0$ et $p = n$), et que pour des vecteurs a_i orthogonaux le produit de Clifford $a_1 a_2 \dots a_p$ est égal à leur produit extérieur $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_p$.

Le ψ d'Hestenes est un élément de la sous-algèbre paire $Cl^+(1, 3)$ de $Cl(1, 3)$, i.e. la somme d'un scalaire (ou élément de $\wedge^0 M$), d'un bivecteur élément de $\wedge^2 M$) et d'un pseudo-scalaire (élément de $\wedge^4 M$), c'est à dire un objet réel ainsi que tous les éléments d'une algèbre de Clifford. En

particulier (dans l'identification $\gamma_\mu = e_\mu$) les multivecteurs

$$\underline{i} = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \in \wedge^4 M \quad (3)$$

$$i\sigma_3 = \gamma_2\gamma_1 = e_2 \wedge e_1 \in \wedge^2 M \quad (4)$$

bien que de carré égal à -1 dans $Cl(M)$, n'ont rien d'imaginaire.

Notons que les éléments de $Cl^+(1, 3)$ forment un anneau de biquaternions, de même que les éléments de $Cl(3, 0)$ ou biquaternions de Clifford. Mais appliqués à la géométrie de l'espace-temps M , ils sont la source de transformations euclidiennes, que D. Hestenes a mis en évidence, qui n'ont pas d'équivalent dans la géométrie de E^3 .

De plus Hestenes construisait dans [8], 1967, une équation strictement équivalente à celle de Dirac, dont l'inconnue est le biquaternion ψ , élément de $Cl^+(1, 3)$ et non plus, comme le spineur Ψ , de \mathbf{C}^4 , et dans laquelle apparaît explicitement le bivecteur $i\sigma_3$, dont le rôle essentiel de générateur des rotations dans le plan des (x, y) puis, après la rotation de Lorentz R , dans "le plan du spin" (l'expression est de Hestenes), engendré par les vecteurs n_1, n_2 , avait été auparavant souligné dans [5].

2. Les grandeurs et équations invariantes de la théorie de Dirac

Nous présentons les 8 scalaires réels correspondant au système invariant, équivalent au spineur de Dirac, à peu de chose près comme ils ont été décrits dans [4]: Deux scalaires, ρ, β , et 6 scalaires correspondant à v, s (5 scalaires compte tenu de $v^2 = 1, s^2 = -1, v.s = 0$) et un angle χ , égal au double de la "phase", permettant de fixer la position de n_1 dans "le plan du spin".

Les grandeurs invariantes les plus importantes sont, outre le courant de Dirac ρv , le spin $(\hbar c/2)n_1 \wedge n_2$ (c'est un bivecteur comme tout moment cinétique) et le Tenseur de Tetrode ρT tel que le vecteur d'univers d'impulsion-énergie $p = T(v)$ prend la forme ([10], 1971)

$$p = \frac{\hbar c}{2}\omega - eA, \quad \omega = \omega_\mu e^\mu, \quad \omega_\mu = (\partial_\mu n_1).n_2 = -(\partial_\mu n_2).n_1 \quad (5)$$

(A potentiel vecteur d'univers), qui est indépendante de jauge (voir [4], [7] et [10], 1988).

Un système d'équations invariantes strictement équivalent à celui de Dirac a été établi pour la première fois par Takabayasi [4]. Notons que par une seule ligne de calcul (la multiplication à droite par

ψ^{-1}) on a établi dans [10], 1971, eq. (6), (voir aussi [10], 1988), à partir de l'équation de Dirac-Hestenes [8], 1967, une équation invariante (D) à valeurs dans $\wedge^1 M \oplus \wedge^3 M$, dont on peut déduire des systèmes d'équations représentant chacun un aspect de la théorie intrinsèque de Dirac, dont celui de [4], p. 24.

Rappelons l'un d'entre eux ([10], 1985) qui nous a été inspiré par les travaux de Costa de Beauregard sur le tenseur de Tetrode: Soit $(D)_I$ la partie du système invariant de Dirac qui ne contient pas la densité ρ , $(D)_{II}$ l'autre partie. L'équation $(D)_I$ qui est, ainsi que $(D)_{II}$, à valeur dans M , contient le vecteur p , et le produit par ρ de sa projection orthogonale sur s est la densité lagrangienne, dont une composante L_D est en particulier de la forme ([4], p. 29, éq. IVa)

$$L_D = -\rho(mc^2 \cos \beta + Tr(T)) \quad (6)$$

Autrement dit $(D)_I$ contient hormis ρ toute l'information nécessaire à la construction de l'équation de Dirac par la méthode variationnelle. Soient les trois équations de conservation (C), du courant, de l'impulsion-énergie et de la densité de spin. On a le théorème suivant: $(D)_I$ et (C) déterminent $(D)_{II}$. La démonstration donnée dans [10], 1985, est longue mais confirme le calcul variationnel à partir des paramètres invariants fait dans [4] par Takabayasi, et l'importance de ces paramètres.

3. Le repère de Takabayasi et la relativité générale

Le formalisme spinoriel conduit à des difficultés d'inclusion de la mécanique quantique dans la relativité générale "qui sont *insurmontables* si l'on veut utiliser la technique classique de la géométrie riemannienne". C'est Elie Cartan, [11], p. 4 qui le dit.

Même si les spineurs de Cartan ne sont pas du tout ce que sont les spineurs de Pauli et de Dirac (voir Note), cette affirmation restera algébriquement vraie tant qu'on n'aura pas remplacé le $\sqrt{-1}$ de ce formalisme par ce qu'il est, un bivecteur $e_2 \wedge e_1$ de l'espace-temps.

Un moyen de tourner la difficulté est de mettre la mécanique quantique sous forme invariante par rapport à tout repère galiléen et cela nous ramène pour la particule de Dirac, aux travaux des écoles L. de Broglie ou Hestenes.

Ce qui paraît le plus apte au rapprochement avec la géométrie riemannienne est l'explicitation géométrique du mouvement du repère de

Takabayasi-Hestenes $\{v, n_1, n_2, s\}$. Ce mouvement est lié à l'impulsion-énergie de la particule, représentée par le tenseur T , par le fait que les trois valeurs $T_0(v)$, $T_0(n_1)$, $T_0(n_2)$ de la partie cinétique T_0 du tenseur T (i.e. T diminué de son terme dû au potentiel A), explicitées dans [10], 1974, représentent le produit de $\hbar c/2$ par la rotation infinitésimale du sous-repère $\{v, n_1, n_2\}$, dans lequel, nous le rappelons, se trouvent définis la vitesse d'univers et le support géométrique $n_1 \wedge n_2$ du spin. On peut imaginer, associé à ce que nous entendons par l'énergie en mécanique quantique, des mouvements à la Darboux de repères, qu'on peut facilement inclure dans l'espace courbe de la relativité générale, et espérer une voie d'étude vers la fusion de ces deux théories.

Notons que dans [6] le mouvement du repère propre est considéré partir des travaux de Mathisson en particulier, mais d'un point de vue plus dynamique que géométrique.

3. L'alternative de Takabayasi et le renversement du temps

Dans le formalisme spinoriel la transformation PT apparaît incontournable pour le passage de l'équation de l'électron à celle du positron.

Mais les positrons qui parcourent la moitié de la circonférence du LEP pour heurter des électrons ont-ils été émis *avant* ou *après* le choc? Poser la question à un expérimentateur du LEP lui fait hausser les épaules: évidemment ils ont été émis *avant*.

Dès lors quelle signification donner au renversement T du temps dans l'invariance CPT , dont on devrait déduire que les positrons ont été émis *après* le choc? Les positrons qui se promènent dans l'atmosphère sont-ils dus aux explosions nucléaires qui n'avaient pas ou qui n'ont pas encore explosé? Dans ce cas, vu leur nombre, on pourrait être rassuré, l'apocalypse nucléaire n'aura pas lieu.

De façon générale a-t-on jamais vu une particule élémentaire remonter le temps?

Précisons le passage de l'équation de l'électron à celle du positron.

La composante dans $\wedge^3 M$ de l'équation invariante de Dirac (D) ([10], 1971) fait apparaître les termes

$$\rho(mc^2 \cos \beta v \wedge n_1 \wedge n_2 + eA \wedge n_1 \wedge n_2) \quad (7)$$

où, on le rappelle, $n_1 \wedge n_2$ est le bivecteur spin d'univers.

(a) 1. Changeant la charge e en $-e$, on peut changer la base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ en $\{e_0, -e_1, e_2, e_3\}$ par une transformation P , ce qui

change n_1 en $-n_1$ et laisse invariant le terme de charge: $(-e)(-n_1)\wedge n_2 = en_1 \wedge n_2$. C'est la transformation CP .

2. Mais on peut aussi dire qu'à un électron de spin $n_1 \wedge n_2$ correspond un positron de spin $n_2 \wedge n_1$, d'où $(-e)(n_2 \wedge n_1) = en_1 \wedge n_2$. C'est une invariance "changement du signe de la charge et retournement de l'orientation du spin" ([1], 1988) qui assure la conservation à la fois de la charge et du spin dans le processus création-annihilation électron-positron.

(b) Puisque le terme de charge reste invariant, il doit en être de même du terme de masse.

1. On peut écrire $v \wedge n_1 \wedge n_2 = (-v) \wedge (-n_1) \wedge n_2$. C'est la transformation PT qui fait remonter vers le passé la vitesse d'univers $(-v)$. On peut certes exclure la possibilité d'un positron venant du futur en disant que si le courant de probabilité $\rho(-v)$ du positron est tourné vers le passé, c'est le courant de charge $\rho(-e)(-v)$ qui a une signification physique et qu'il est dirigé vers le futur.

Mais l'invariance $ev = (-e)(-v)$ ne peut apparaître nulle part dans l'équation de Dirac. Le vecteur v apparaît en effet associé au terme de masse et non pas au terme de charge. Cette remarque, qui à ma connaissance n'a jamais été faite, réduit à néant la possibilité de la prise en compte, dans la théorie de Dirac, d'un courant de charge dirigé vers le futur en association avec un courant de probabilité dirigé vers le passé.

2. Si, au lieu d'envisager la transformation P , $n_1 \wedge n_2 \rightarrow (-n_1) \wedge n_2$ de (a)-1, on envisage le *retournement* de l'orientation de spin $n_1 \wedge n_2 \rightarrow n_2 \wedge n_1$, il est naturel de faire intervenir la transformation $\beta \rightarrow \beta + \pi$, qui donne

$$mc^2 \cos \beta v \wedge n_1 \wedge n_2 \rightarrow mc^2 \cos(\beta + \pi) v \wedge n_2 \wedge n_1 = mc^2 \cos \beta v \wedge (-n_2 \wedge n_1) \quad (8)$$

Or Hestenes a clairement montré dans [8], 1967, que \underline{i} est le générateur de rotations d'angles β qui affectent les bivecteurs de M sans changer ses vecteurs et que donc la transformation $\beta \rightarrow \beta + \pi$ est une *transformation qui change l'orientation des plans sans changer l'orientation des droites*. Une telle transformation est une chiralité inaccessible à notre perception ordinaire, tout à fait différente de l'effet miroir.

On peut supposer que la transformation $\beta \rightarrow \beta + \pi$ change l'orientation de $n_2 \wedge n_1$ dans le terme de masse et restaure ainsi l'invariance de ce terme dans le passage de l'électron au positron qu'on lui associe.

Reprenons l'image de l'horloge du corpuscule de L. de Broglie, dont le mouvement de l'aiguille peut être traduit par l'équation de Dirac sans terme de charge. Le plan du cadran est le "plan du spin". Si le corpuscule est l'électron, l'angle β est égal à zéro. Si c'est le positron, il est égal à π . On peut interpréter le changement de zéro en π comme ne changeant pas l'orientation de l'aiguille (le vecteur n_1) ni son mouvement, mais comme renversant l'orientation du cadran (i.e. l'orientation du "plan du spin"). On peut avoir alors l'impression que l'aiguille, en parcourant en sens inverse les graduations du cadran, remonte le temps.

Rappelons que $m \cos \beta$ apparaît dans la densité lagrangienne (ce qui donne quand $\cos \beta < 0$ ce que Takabayasi a appelé un "ass-like behaviour"). Takabayasi avait signalé en [4], p. 41-43 le changement $\beta \rightarrow \beta + \pi$ en alternative au renversement du temps, mais sans l'interprétation géométrique ci-dessus.

Cette alternative est inaccessible par l'usage direct du formalisme spinoriel, parce que $\underline{i} = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ et $i\sigma_3 = \gamma_2 \gamma_1 = e_2 \wedge e_1$ ne peuvent y apparaître que sous le même symbole $\sqrt{-1}$. Le passage aux équations invariantes avait permis à Takabayasi de la formuler.

4. L'Ecole L. de Broglie et les théories de jauge

Dans [5], plus précisément dans [7], et tout à fait indépendamment dans [8], 1967, un changement de jauge électromagnétique correspond à une rotation d'un angle χ , double de l'angle définissant la transformation de jauge

$$\Psi \rightarrow \Psi e^{\sqrt{-1}\chi/2} \quad (9)$$

des vecteurs (n_1, n_2) dans "le plan du spin".

Le changement de jauge a pour effet d'ajouter, dans l'expression (5) du vecteur d'impulsion-énergie p_μ , le gradient $\partial_\mu \chi$ à ω_μ et l'invariance de jauge est assurée par l'addition simultanée de $(\hbar c/2e)\partial_\mu \chi$ au potentiel A_μ (voir [10], 1988).

La rotation de l'angle χ dans "le plan du spin" provient de ce que le nombre imaginaire $\sqrt{-1}$ dans la construction des spineurs représente, mais de façon occulte, le générateur des rotations dans le plan des (x, y) (voir Note) et de ce que la rotation de Lorentz R de (1) changent les vecteurs (e_1, e_2) en (n_1, n_2) .

La transformation de jauge correspond donc dans [5] et [7], et indépendamment dans [8], 1967, au changement

$$\psi \rightarrow \psi e^{i\sigma_3 \chi/2} \quad (10)$$

la multiplication par l'exponentielle devant être effectuée à *droite* du biquaternion ψ .

L'interprétation ci-dessus de la jauge électromagnétique est *violemment niée* par la plupart des physiciens à qui on la signale (malgré la réputation dont on peut créditer J.M. Souriau en ce qui concerne le formalisme matriciel, et la confirmation qu'en ont donné les spécialistes des algèbres de Clifford les plus avertis) sous prétexte que la commutation

$$e^{\sqrt{-1}\chi/2}\Psi = \Psi e^{\sqrt{-1}\chi/2} \quad (11)$$

et le fait que Ψ contient une représentation de $SO^+(1,3)$ ne peut conduire qu'au produit *direct* $SO^+(1,3) \times U(1)$, le groupe $U(1)$ ne pouvant être alors considéré que comme *représentant une symétrie interne abstraite*. Que n'ont-ils lu les travaux de A. Sommerfeld -une bonne référence n'est-ce pas?- sur les solutions biquaternioniques de l'équation de Dirac (voir [12], par. IV.7) où le générateur de rotations $i\sigma_3 = \gamma_2\gamma_1$ apparaît explicitement.

C'est là une erreur grave et lourde de conséquences. Quand le biquaternion ψ est remplacé par le biquaternion $\psi \exp(i\sigma_3\chi/2)$, alors $R \in \text{Spin}(M)$, est remplacé par $R \exp(i\sigma_3\chi/2) \in \text{Spin}(M)$. (Nota. $\text{Spin}(M)$ est la représentation dans $Cl(M)$ de $SO^+(1,3)$). *On ne sort pas de $SO^+(1,3)$.* En prime on a une interprétation géométrique propre à inclure aisément la jauge dans l'espace courbe de la relativité générale.

Cette erreur se répercute sur les théories de jauge faisant des groupes de symétrie internes, en particulier le groupe $SU(2) \times U(1)$ de l'électrofaible, des groupes abstraits alors qu'ils qu'on peut les associer à des sous-groupes de rotations de l'espace-temps ([10], 1997), et interdit toute interprétation géométrique réelle de ces théories. Elle rend difficile leur inclusion dans la relativité générale.

Un danger supplémentaire, auquel certains physiciens n'ont pas échappé, c'est de mettre par analogie avec des équations où $\sqrt{-1}$ est un bivecteur, des relations où $\sqrt{-1}$ est $\sqrt{-1}$, c'est à dire un objet réellement (si l'on peut dire) imaginaire, c'est à dire physiquement inconsistent. La confusion est alors totale et peut conduire à des absurdités.

5. Takabayasi et le vecteur d'impulsion-énergie

Le vecteur d'impulsion-énergie p_μ , eq. (5), (désigné par k_μ dans [4]) a été l'objet d'un calcul particulier de la part de Takabayasi.

Notons d'abord l'interprétation de son terme ω_μ ([13], [10], 1971): ce vecteur d'univers représente, comme le montre (5), la rotation infinitésimale du "plan du spin" sur lui-même, et on peut noter la quadruple importance de ce plan:

1. Il exprime par sa rotation l'impulsion-énergie de la particule.
2. Il détermine la direction du bivecteur spin.
3. C'est dans ce plan que se réalise le changement de jauge.

4. Le retournement de ce plan, par l'addition de π à l'angle d'Yvon-Takabayasi (on peut ajouter Hestenes), correspond au passage géométrique de l'électron au positron.

Takabayas calcule dans [4], p. 17, eq. (II), le rotationnel $\partial_\mu p_\nu - \partial_\nu p_\mu$ de p_μ , ce qui fait apparaître le rotationnel de ω_μ . Ce calcul n'a rien d'évident. Il a été repris dans [13], p. 726, aux fins de vérification, mais avec l'interprétation géométrique ci-dessus.

Ce calcul a été repris aussi avec cette même interprétation géométrique de [13], mais tout à fait indépendamment de [4] et [13], par F. Gliozzi dans [14], eq. (1.5), dans son étude sur les monopôles (cordes) de Dirac. Gliozzi attribue à ω_μ , au facteur $\hbar c/2e$ près, la qualité de ce qu'il appelle un potentiel de jauge (le même que celui qui intervient aussi dans la théorie de l'électrofaible). Ce qu'il y a de particulièrement intéressant, c'est que Gliozzi en déduit la nécessité de la présence de défauts topologiques pour ω_μ qui disparaissent dans son rotationnel $\partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu$. Le décès de Gliozzi a mis un terme à ces recherches.

On peut cependant remarquer que ω intervient dans le vecteur impulsion-énergie p de la particule de Dirac, dont la projection orthogonale sur e_0 est l'énergie E de cette particule dans le repère $\{e_\mu\}$, que l'énergie du photon n'est autre que la différence $E_1 - E_2$ de deux valeurs de E , donc de deux valeurs du vecteur ω , et entrevoir la possibilité d'une explication par une approche topologique des paradoxes de la mécanique quantique (voir [10], 1993).

L'exemple topologique donné par Gliozzi ("Tout champ continu de vecteurs tangents à une surface S de E^3 difféomorphe à une sphère s'annule au moins en un point de S ") relève de la géométrie globale, qui paraît bien convenir à la levée de paradoxes de l'existence de corpuscules qui sont chacun à la fois, comme onde continument partout, et comme corpuscule presque nulle part.

5. Le mystère de l'angle d'Yvon-Takabayasi

Signalons, pour la petite histoire, qu'à la fin des années 1970, J. Yvon s'est un peu plaint auprès de G. Casanova de ce qu'on oubliait qu'il avait été le premier à introduire cet angle. Curieusement, Takabayasi ne fait pas référence aux travaux d'Yvon dans [4]. Mais le nom d'Yvon a été très souvent associé à celui de Takabayasi par l'école L. de Broglie, en ce qui concerne tant cet angle que le début vraiment consistant de l'étude intrinsèque de la théorie de Dirac.

Nous rappelons que l'angle d'Yvon-Takabayasi β a été interprété par Hestenes comme celui d'un groupe de rotations qui affectent les bivecteurs de l'espace-temps M , *mais non les vecteurs* ([8], 1967). Ce groupe est défini par une transformation dans $Cl(M)$, qui relève donc de la géométrie euclidienne de M , *mais qui ne relève pas du groupe orthogonal* $O(1, 3)$. Il est totalement ignoré des physiciens qui ne connaissent pas les travaux des écoles L. de Broglie et Hestenes, bien qu'il joue un rôle essentiel dans le passage de l'équation de l'électron à celle du positron, si l'on rejette l'hypothèse (niée par l'expérience) d'un positron remontant le temps, ou celle (inconsistante avec la théorie de Dirac) d'un courant de charge tourné vers le futur mais d'un courant de probabilité tourné vers le passé.

Cet angle β intervient partout dans la théorie intrinsèque de Dirac, en particulier par son gradient dans la valeur du tenseur impulsion-énergie $\rho T(s)$ ([6], éq. (IV-24), [10], 1974).

Concernant cette présence, nous avons établi dans [10], 1992, que le tenseur T_0 , (i.e. T diminué du terme en potentiel-vecteur) correspond à l'opérateur infinitésimal du groupe

$$G = \{e^{\underline{i}\beta/2} R : \underline{i} \in \wedge^4 M \text{ (avec } \underline{i}^2 = -1), \beta \in \mathbf{R}, R \in \text{Spin}(M)\} \quad (12)$$

L'angle β n'intervient pas pour les valeurs $T_0(v)$, $T_0(n_1)$, $T_0(n_2)$, qui n'expriment rien d'autre, comme on l'a dit plus haut, que la rotation infinitésimale du sous-repère fondamental $\{v, n_1, n_2\}$.

Cet angle paraît donc étranger à tout ce qui concerne le courant de Dirac, le spin, le vecteur d'impulsion-énergie p . Pourtant il est présent, bien que d'une faible valeur, dans les solutions de Darwin pour le potentiel central ([15], [10], 1974).

Divers auteurs ont cherché des solutions au problème pour le potentiel central menant au même système d'équations radiales que les

solutions de Darwin, mais à angle β nul. Citons les solutions planes de Casanova ([9], 1970) et celles à trois dimensions de H. Krüger [16]. Mais appliquées aux résultats expérimentaux connus, comme l'effet Zeeman ou l'émission spontanée, il semble pour le moment que seules les solutions sphériques de Darwin conviennent. On doit donc se résigner actuellement à l'existence de valeurs faibles mais non nulles (voir l'article récent de C. Daviau [17]) de cet angle dont la fonction physique, mis à part celle importante qu'il occupe dans la transformation $\beta \rightarrow \beta + \pi$, reste encore mystérieuse.

5. Conclusion

L'interprétation géométrique du spineur de Dirac, apportée par G. Jakobi et G. Lochak et confirmée ultérieurement mais indépendamment par D. Hestenes, est incontestablement, du point de vue de la géométrie de l'espace-temps, un bouleversement de la présentation abstraite de la mécanique quantique qu'impose, aveugle dans sa cohérence, le formalisme spinoriel. L'étude des propriétés des grandeurs quantiques invariants par rapport à tout repère galiléen (ce passage obligé de l'inclusion de la mécanique quantique dans la relativité générale) initiée par l'école L. de Broglie pour la théorie de la particule de Dirac est entièrement réalisée aujourd'hui pour la théorie de l'électrofaible ([8], 1982, [10], 1997). Son extension à toute la théorie des particules élémentaires apparaît comme un impératif.

Note. Spineurs et quaternions

Lochak [5] et indépendamment Hestenes [8], 1967, précédés, dans le cas particulier des solutions de Darwin, et sans l'interprétation géométrique, par Sommerfeld [12], ont remplacé le spineur Ψ de Dirac par le produit ψU où ψ est un biquaternion et U un spineur unité dans [5], et un idempotent, le même dans [12], IV.5., éq. (30a) et dans [8], 1967, éq. (8.6). Un travail plus récent de A. Lasenby, C. Doran, S. Gull [18] a montré que U pouvait être comme dans [5], réduit à l'unité, et que les spineurs de Pauli et de Dirac n'étaient en fait chacun qu'une *forme désarticulée et tronquée* respectivement du quaternion d'Hamilton et du biquaternion élément de $Cl^+(1,3)$.

Nous renvoyons le lecteur à [10], 1995 et 1997, pour ce qui concerne le spineur de Dirac, et nous nous limiterons ici à la comparaison du spineur de Pauli et du quaternion d'Hamilton.

Nous rappelons brièvement notre présentation. Considérons le quaternion d'Hamilton

$$q = w + ix + jy + kz \quad (N1)$$

avec

$$ji = -ij = k, \quad kj = -jk = i, \quad ik = -ki = j; \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad (N2)$$

(voir [19], p. 23, avec un changement de signe pour i, j, k) où i, j, k sont des bivecteurs de E^3

$$i = \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{j}\vec{k}, \quad j = \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{k}\vec{i}, \quad k = \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{i}\vec{j} \quad (N3)$$

$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ repère orthonormal de E^3).

Utilisant la relation $jk = -i$ on peut écrire

$$q = w + kz - j(-y + kx) = u_1 - ju_2 \quad (N4)$$

Laisant tomber le bivecteur $-j$, remplaçant le bivecteur $k = \vec{i} \wedge \vec{j}$ par le "nombre imaginaire" $\sqrt{-1}$ on peut associer à q un "vecteur colonne" à "composantes complexes" $\xi = (u_1, u_2)$ qui n'est autre que le spineur de Pauli.

En effet, l'application de (N2) entraîne

$$iq = (ku_2) - j(ku_1), \quad jq = u_2 - j(-u_1), \quad kq = (ku_1) - j(-ku_2) \quad (N5)$$

ce qui correspond exactement au produit par les matrices de Pauli $i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$, du spineur ξ , mais dans lesquelles $i = \sqrt{-1}$ a été remplacé par le bivecteur k , générateur des rotations dans le plan des (x, y) .

Il est impossible qu'on ait pu volontairement transformer ainsi le quaternion en spineur. Si cela se trouve comme ça, c'est qu'on ne l'a pas fait exprès! On peut expliquer maintenant que le mystère des spineurs ait perduré 65 ans.

Géométriquement cela n'a pas de sens. On peut écrire indépendamment de toute base

$$q = w + \underline{i}\vec{U}, \quad \underline{i} = \vec{i} \wedge \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}\vec{j}\vec{k}$$

Pourquoi s'imposer le recours à une base? Pourquoi casser le vecteur invariant \vec{U} en deux?

On peut aussi écrire (d'une infinité de façons) dans $Cl(E^3)$

$$q = \vec{b}\vec{a} = \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b} \wedge \vec{a}$$

Pourquoi remplacer une théorie, celle des algèbres de Clifford, qui traduit le plus immédiatement et le plus fidèlement (voir [10], 1988, par. 6 et Annexe) le théorème fondamental d'E. Cartan sur les groupes orthogonaux ("Toute isométrie est un produit de symétries considérées chacune par rapport à un hyperplans non isotrope") par une autre, qui rend nécessaire le recours à l'abstraite théorie des représentations irréductibles des groupes orthogonaux sur des espaces complexes ?

Algébriquement c'est absurde. Dans le formalisme du spineur et des matrices de Pauli il n'est pas possible de reconnaître que, quand on fait le produit d'une matrice par un spineur, on fait en réalité le produit de deux quaternions, deux objets de même structure algébrique; un formalisme qui rétrograde un corps, celui des quaternions, à un ensemble d'objets, les spineurs, dont on ne peut même pas faire un anneau.

A la fois géométriquement et algébriquement c'est fallacieux. Quand on multiplie, *indifféremment à droite ou à gauche*, le spineur ξ par $\sqrt{-1}$, on ne peut pas se douter qu'on multiplie à *droite* un quaternion par ce qui est en réalité le *bivecteur* $k = \vec{i} \wedge \vec{j}$.

On peut alors se demander pourquoi le grand géomètre Elie Cartan a apporté son crédit au formalisme spinoriel par son ouvrage "Leçons sur la théorie des spineurs" [11]? Mon opinion, fondée sur mes entretiens avec mon maître, Paul Vincensini (E. Cartan, après l'avoir chargé de la rédaction d'un de ses ouvrages, lui avait proposé celle de ces *Leçons*, pour finalement la confier à A. Mercier sur la demande de celui-ci) est que Cartan (ni Vincensini par ailleurs brillant continuateur des travaux d'Hamilton sur les congruences rectilignes) n'a jamais soupçonné que le spineur de Pauli est un objet réel, rien d'autre qu'une forme éclatée du quaternion d'Hamilton.

Cela peut se constater sur les solutions que E. Cartan donne du système de deux équations des droites de E^3 isotropes (donc imaginaires) associées aux solutions de l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 0$:

$$u_1 z + u_2(x - \sqrt{-1}y) = 0$$

$$u_1(x + \sqrt{-1}y) - u_2 z = 0$$

([11], p. 54) où apparaît la somme des produits, pondérés chacun par x, y, z respectivement, des matrices de Pauli $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ par un "vecteur" $\xi = (u_1, u_2)$ à deux composantes nécessairement complexes.

Les solutions (notées ξ_0, ξ_1 dans [11])

$$u_1 = \pm [(x - \sqrt{-1}y)/2]^{1/2}, \quad u_2 = \pm [-(x + \sqrt{-1}y)/2]^{1/2}$$

(voir [11], p. 52, après correction d'une erreur d'impression sur ξ_1) de ce système, proposées par Cartan et présentées chacune comme un "spineur" $\xi = (u_1, u_2)$, c'est à dire aussi "un vecteur isotrope orienté" (p. 53), ont été la source de beaux travaux de géométrie algébrique, mais n'ont, à ma connaissance, aucun équivalent en mécanique quantique. Les spineurs de Pauli à associer à ce système seraient plutôt les solutions triviales $u_1 = \pm\sqrt{-1}z, u_2 = \mp y \pm \sqrt{-1}x$, c'est à dire, après la transcription (N4), les quaternions $\pm(ix + jy + kz)$ de carré nul.

Le même ouvrage de E. Cartan contient le théorème cité plus haut sur les groupes orthogonaux (une démonstration plus courte due à J. Dieudonné se trouve dans [20], Par. 6, Num. 4, mais n'ôte rien à la paternité par Cartan de ce théorème), à l'opposé du formalisme complexe. On peut être étonné de la dichotomie qui apparaît dans l'oeuvre d'un des plus grands parmi les géomètres: d'une part la géométrie intrinsèque des repères mobiles, des espaces riemanniens, le théorème le plus fondamental sur les groupes orthogonaux (on en déduit par exemple -voir [10], 1988- en quelques lignes, sans calcul, que $O(p, n-p)$ admet au plus quatre composantes connexes); d'autre part des représentations sur des espaces complexes et abstraits propres à décourager les géomètres formés à l'école de Gauss, Grassmann, Hamilton, Clifford.

Cette dichotomie se retrouve entre les physiciens de la relativité générale et la quasi totalité de ceux de la mécanique quantique. Paradoxalement, l'ouvrage de E. Cartan sur les spineurs n'a fait que l'aggraver.

Certes, quand E. Cartan écrit (p. 90):

"Théorème. *Il est impossible d'introduire les champs de spineurs, le mot "spineurs" ayant le sens géométrique que nous lui avons donné, dans la métrique riemannienne classique.*"

il ne se trompe pas. L'erreur a été de confondre, parce que les matrices de Pauli et de Dirac utilisées étaient les mêmes qu'en mécanique quantique, les spineurs de Cartan et ceux de Pauli et de Dirac.

Les travaux des Ecoles L. de Broglie puis Hestenes ont montré que l'inclusion de ce qu'on connaît de la théorie quantique dans l'espace riemannien de la relativité générale, ce passage obligé de la fusion, si elle s'avère possible, des deux théories *ne pose pas de problème*.

Références

- [1] L. de Broglie, *Théorie Générale des Particules à Spin*, G.V., Paris (1954)
- [2] J. Yvon, *Equations de Dirac-Madelung*, J. Phys. et le Radium, **VIII**, 18 (1940)
- [3] O. Costa de Beauregard, *Contribution à l'Etude de la Théorie de l'Electron de Dirac*, G.V., Paris (1943)
- [4] T. Takabayasi, *Relativistic Hydrodynamics of the Dirac Matter*, Supp. of the Prog. Theor. Phys., **4**, 1 (1957)
- [5] G. Jakobi et G. Lochak, *Introduction des paramètres relativistes de Caley-Klein dans la représentation hydrodynamique de l'équation de Dirac*, C.R.A.S., **243**, 234, et *Décomposition en paramètres de Clebsch de l'impulsion de Dirac et interprétation physique de l'invariance de jauge des équations de la Mécanique ondulatoire*, **243**, 357 (1956).
- G. Lochak, *Signification mécanique de l'invariance de jauge de première espèce dans la représentation hydrodynamique des équations de la Mécanique ondulatoire*, **245**, 2035 (1957)
- [6] F. Halbwachs, *Théorie Relativiste des Fluides à Spin*, G.V., Paris (1960)
- [7] F. Halbwachs, J.M. Souriau, J.P. Vigié, *Le groupe d'invariance associé aux rotateurs relativistes et la théorie bilocale*, J. Phys. et le Radium, **22**, 393 (1961)
- [8] D. Hestenes, *Real Spinor Fields*, J. Math. Phys., **8**, 798, (1967),
- *Space-Time Structure of Weak and Electromagnetic Intereaction*, Found. Phys. **12**, 153 (1982)
- [9] G. Casanova, *Sur les théories de D. Hestenes et de Dirac*, C.R.A.S. **266**, 1551 (1968), *Solutions planes de l'équation de Dirac-Hestenes dans un champ central*, **270**, 1470 (1970)
- [10] R. Boudet, *Sur une forme intrinsèque de l'équation de Dirac et son interprétation géométrique*, C.R.A.S., **272**, 767 (1971) et *Sur le tenseur de Tetrode et l'angle de Takabayasi. Cas du potentiel central*, **278**, 1063 (1974),
- *Conservation laws in the Dirac theory*, J. Math. Phys., **26**, 718 (1985),
- *La géométrie des particules du groupe SU(2)*, Ann. Fond. L. de Broglie, **13**, 105 (1988),

- Les algèbres de Clifford et les transformations des multivecteurs. L'algèbre de Clifford de $R(1,3)$ et la constante de Planck*, in *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, A. Micali et al., 343, Kluwer Ac. Pub., Dordrecht (1992),
- Le corpuscule de Louis de Broglie et la géométrie de l'espace-temps* in *Courants, Amers, Ecueils en Microphysique*, p. 77, Fond. L. de Broglie, Paris (1993),
- Notes de lecture*, Ann. Fond. L. de Broglie, **20**, 231 (1995)
- The Takabayasi moving frame, from the A potential to the Z boson*, in *The Present Status of the Quantum Theory of Light*, S. Jeffers et al., 471, Kluwer Ac. Pub., Dordrecht (1997)
- The Glashow-Salam-Weinberg electroweak theory in the real algebra of spacetime*, in *The Theory of the Electron*, J. Keller and Z. Oziewicz, Uni. Nac. Aut. Méx., Mexico (1997)
- [11] E. Cartan, *Leçons sur la Théorie des Spinors*, Hermann, Paris (1938)
- [12] A. Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien*, Friedr. Vieweg, Braunschweig (1960)
- [13] R. Boudet et P. Quilichini, *Sur les champs de multivecteurs unitaires et les champs de rotations*, C.R.A.S., **268**, 724 (1969)
- [14] F. Gliozzi, *String-like topological excitations of the electromagnetic field*, Nuclear Phys. **B141**, 379 (1978)
- [15] P. Quilichini, *Calcul de l'angle de Takabayasi dans le cas de l'atome d'hydrogène*, C.R.A.S., **273**, 829 (1971)
- [16] H. Krüger, *New Solutions of the Dirac Equation for Central Fields*, in *The Electron*, D. Hestenes et al., 49, Kluwer Ac. Pub., Dordrecht ((1991)
- [17] C. Daviau, *Dirac Equation in the Clifford Algebra of Space*, in *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, V. Dietrich et al., 67, Kluwer Ac. Pub., Dordrecht (1998)
- [18] A. Lasenby, C. Doran and S. Gull, *2-spinors, twistors and supersymmetry in the space-time algebra*, in *Spinors, Twistors Clifford Algebras and Quantum Deformations*, Z. Oziewicz et al., 233, Kluwer Ac. Pub., Dordrecht (1993)
- [19] P.G. Tait, *Traité Élémentaire des Quaternions*, G. V., Paris (1882)
- [20] N. Bourbaki, *Algèbre*, livre II, Chap. . . 9, Hermann, Paris (1959)

(Manuscrit reçu le 11 septembre 2000)